Simon Modeste
simon.modeste@umontpellier.fr

Les berlingots – Clôture
Quelques éléments de résolution

Nous proposons ici une (ou plusieurs) résolution(s) possible(s) du problème des berlingots. Ce texte s'adresse directement aux enseignants (mais certaines parties peuvent être lues par des élèves) pour leur donner des éléments de résolution possible et les accompagner dans l'organisation de la clôture dans leur classe de la session de résolution collaborative de problème.

Ce document est une première version, qui, malgré les relectures peut encore contenir quelques erreurs. Si vous en rencontrez, n'hésitez pas à les signaler à simon.modeste@umontpellier.fr.

1. Le problème suite aux choix de modélisation

Le problème proposé à l'issu de la fiction réaliste relancée est le suivant :

> Optimiser le rangement des berlingots dans les cartons, en minimisant la proportion d'espace perdu dans un carton.

Et les éléments du problème que nous prenons en compte sont les suivants :

- Les berlingots sont représentés par des tétraèdres ;
- Le nombre de formes différentes de berlingots (ie. Le nombre de type de tétraèdres différents) ne doit pas être trop grand (on a choisi de se limiter à 2 ou 3 maximum) ; on peut imaginer que cette contrainte inclut que les types de tétraèdres choisis devront avoir des volumes identiques ou proches ;
- Les cartons de rangement sont assimilés à des pavés droits, tous identiques, dont les dimensions sont à choisir ;
- L'objectif est d'optimiser le remplissage des cartons, c'est-à-dire de minimiser la proportion d'espace inutilisé.

Reformulé mathématiquement, il s'agit donc de proposer un ou plusieurs types de tétraèdres, des dimensions pour un pavé droit, et une disposition de tétraèdres de ce(s) type(s), sans recouvrement entre eux, à l'intérieur du pavé droit, et cela en cherchant à maximiser le rapport entre le volume occupé par l'ensemble des tétraèdres et celui du pavé droit (c'est-à-dire avoir une occupation du carton la plus proche possible de 100 %).

Pour débuter la résolution ce problème, on peut fixer un ou des type(s) de tétraèdres et étudier les « rangements » possibles, ou au contraire fixer des dimensions de pavé et chercher des découpages en tétraèdres.

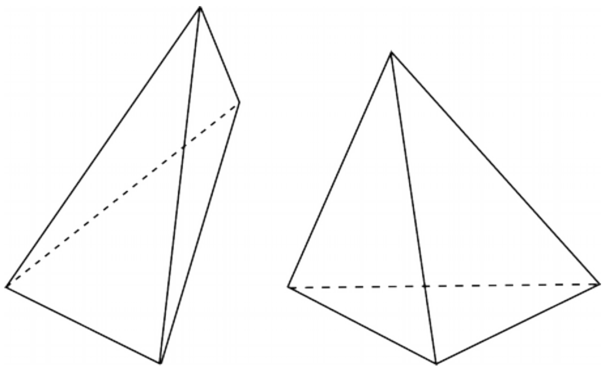
Avant cela, il peut être utile d'étudier les tétraèdres et leurs propriétés.

2. Le tétraèdre

Définition et familles de tétraèdres

On peut voir le tétraèdre de différentes façons :

- Un polyèdre défini par 4 sommets (4 points du plans non coplanaires).
- Une pyramide à base triangulaire



Ces deux points de vue sont équivalents mathématiquement, mais la pyramide a une face que l'on considère comme base.

Un tétraèdre a 4 sommets, 4 faces et 6 arêtes.

Ci-contre, deux tétraèdres (modélisant deux formes de berlingots présentes sur le document de la fiction réaliste).

On peut mentionner certains tétraèdres particuliers :

- Les tétraèdres réguliers, constitués de 4 faces identiques, triangles équilatéraux.
- Les pyramides régulières constitués d'une base équilatérale et de 3 faces isocèles.
- Les tétraèdres trirectangles, ayant un sommet en lequel les 3 faces adjacentes ont un angle droit (autrement, qu'on peut obtenir par section d'un « coin » d'un cube).
- On peut ainsi avoir des tétraèdres trirectangles pyramides régulières, on peut les construire en prenant pour sommets les points de coordonnées (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) et (1,0,0) dans un repère orthonormé de l'espace.

Propriétés

Vu comme une pyramide, on peut exprimer le volume V d'un tétraèdre en fonction de l'aire B de sa base et de sa hauteur h : $V = \dfrac{B \times h}{3}$.

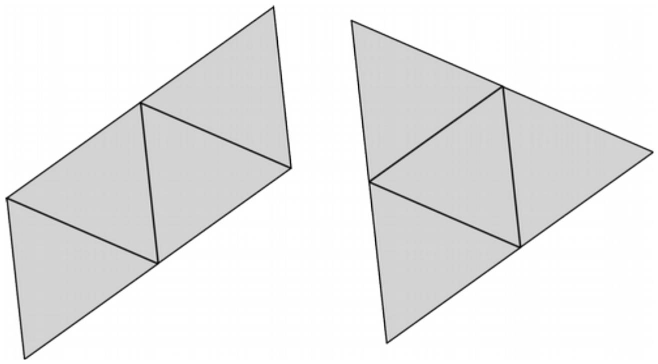
Pour certains tétraèdres particuliers, l'expression de ces grandeurs peut être explicitée en fonction des côtés.

Type de tétraèdre	Hauteur(s)	Volume
Régulier (de coté c)	$\sqrt{\dfrac{2}{3}}c$	$\dfrac{c^3}{6\sqrt{2}}$
Trirectangle pyramide régulière (de coté c adjacent aux angles droits)	c et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}c$	$\dfrac{c^3}{6}$
Pyramide régulière (base de côté a et autre côté des faces c)	Hauteur issue de la base de la pyramide : $\sqrt{c^2 - \dfrac{1}{3}a^2}$	$\dfrac{1}{3} \times \sqrt{c^2 - \dfrac{1}{3}a^2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Rappel : l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

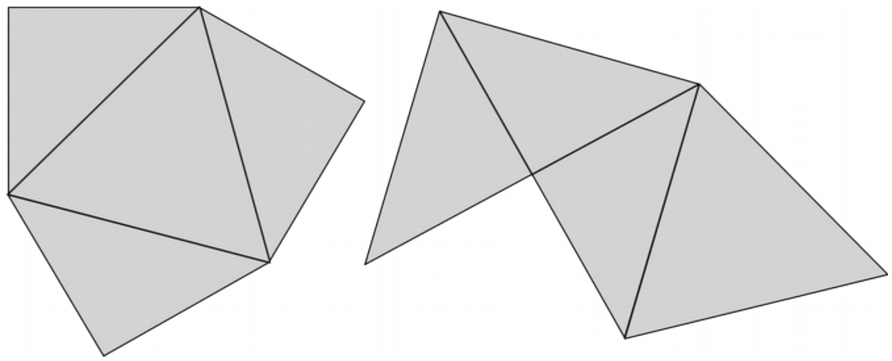
Construction

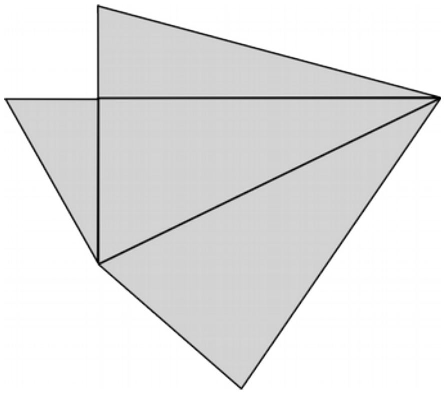
On peut construire un tétraèdre de plusieurs façons. Bien sûr, on peut réaliser un patron constitué de 4 triangles, comme ci-dessous.



Il n’existe que deux patrons pour le tétraèdre régulier (les deux ci-contre).

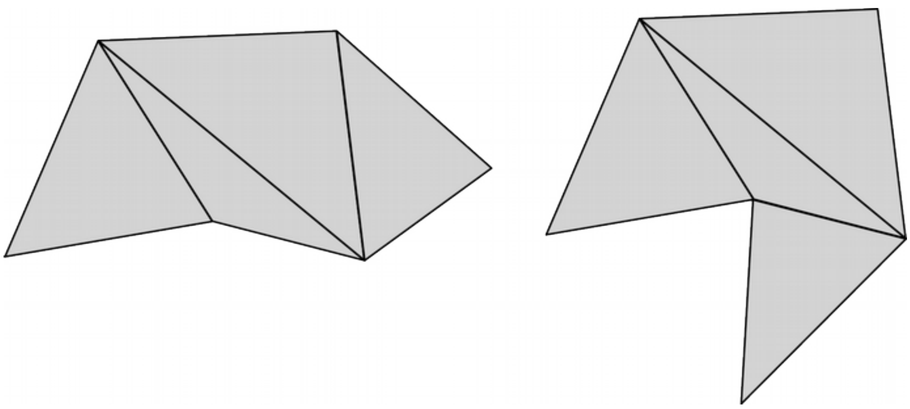
Patrons de tétraèdres trirectangles pyramide régulières (on peut en trouver d’autres).



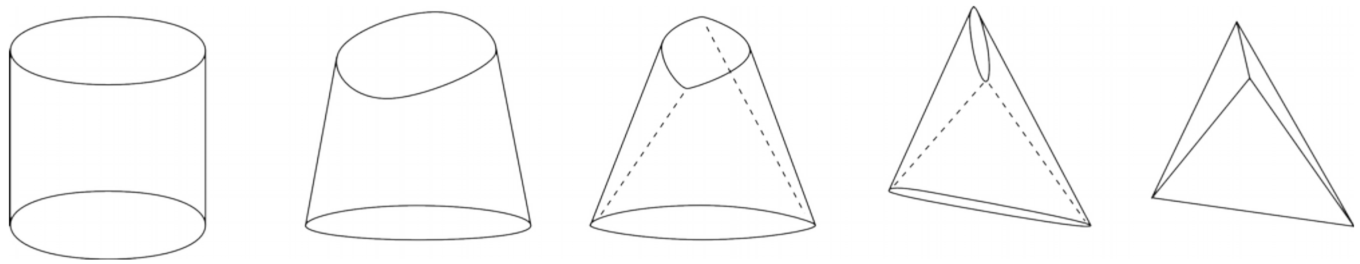


Ci-contre : patron d’un tétraèdre trirectangle quelconque.

Ci-contre : 2 patrons d’un tétraèdre quelconque.

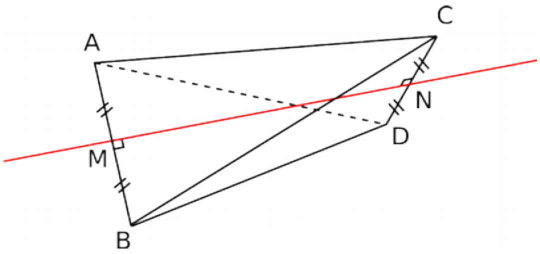


Une autre façon de construire un tétraèdre est de couper et plier un cylindre comme ceci :



C’est de cette façon que sont construits les berlingots alimentaires : en recollant une bande sur elle-même en tube qui est rempli en continu et pincé aux extrémités. On l’aperçoit sur cette video : https://www.rts.ch/archives/tv/jeunesse/5-a-6-des-jeunes/8912080-la-fabrication-d-un-berlingot.html

Cette construction (tout comme l'image de compote de l'énoncé) peut amener à s'intéresser à un type de tétraèdre particulier : un tétraèdre dont deux des arêtes opposées sont orthogonales entre elles, de même longueur, et toutes deux orthogonales à une même droite qui les intersecte en leur milieu (voir dessin ci-contre). On perçoit bien comment ce berlingot se conçoit par pincement d'un cylindre.



On peut exprimer facilement le volume d'un tel tétraèdre : $\frac{1}{6}AB^2 \times MN$.

Retour au problème

Pour aborder le problème, plusieurs approches sont envisageables. On peut partir d'un ou plusieurs tétraèdres et chercher à les assembler de façon optimale, ou partir d'un pavé droit et chercher à le « découper » en tétraèdres.

Si l'on cherche à assembler des tétraèdres de façon optimale, on peut expérimenter avec des tétraèdres choisis construits pour faire des essais.

Les problèmes d'angles et d'alignement lorsqu'on assemble ces tétraèdres peuvent amener à plusieurs questions : Peut-on paver l'espace tout entier avec des tétraèdres (sans avoir de carton) ? Avec quels types de tétraèdres ? Est-ce possible avec des tétraèdres réguliers ? Peut-on partir d'un pavage du plan avec les faces de certains tétraèdres puis réaliser des emboîtements de façon à remplir l'espace par « couches » ?

Si l'on cherche à découper des pavés, on peut partir du cube ou d'un pavé assez simple que l'on souhaite découper, puis assembler un certain nombre de ces pavés simples. On peut alors se demander : est-il possible de remplir entièrement un cube ou un pavé droit avec des tétraèdres ? Avec seulement 2 types, un type de tétraèdres ?

3. Assemblement de tétraèdres

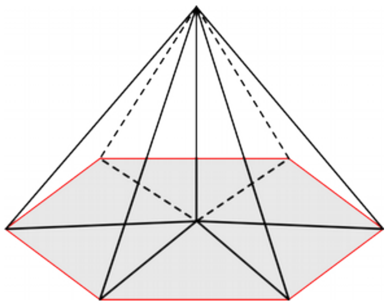
Assembler des tétraèdres réguliers

L'article « Empiler des tétraèdres » présenté sur le site image des maths, http://images.math.cnrs.fr/Empiler-des-tetraedres.html, présente des éléments de réponses et d'histoire à la question du pavage de l'espace par des tétraèdres réguliers. On y apprend que, contrairement à ce que pensait Aristote, il n'existe pas de façon de paver l'espace entièrement avec des tétraèdres réguliers. Une question, proche de celle qui peut intéresser la coopérative de notre problème est alors de déterminer l'empilement le plus dense que l'on peut réaliser avec des tétraèdres réguliers.

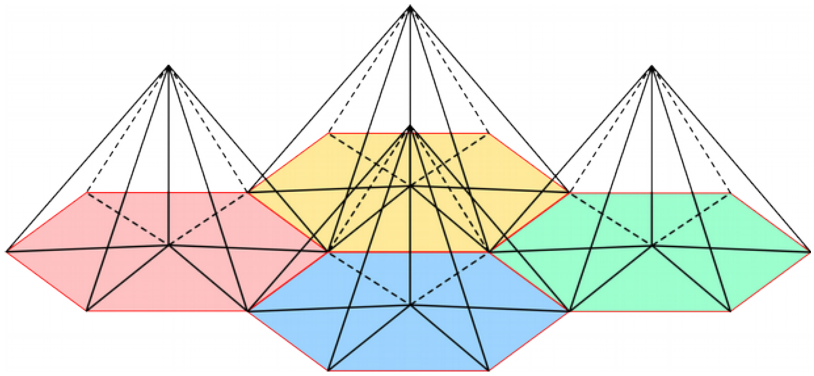
L'article montre que cette question anime encore la recherche et présente un certain nombre de résultats et de questions.

Assembler d'autres tétraèdres

On peut essayer d'empiler des tétraèdres bien choisis pour éviter d'avoir des « trous » entre eux. Une idée peut être de former des pyramides à bases polygonales régulières dont on sait qu'elles pavent le plan (des carrés, des hexagone réguliers…). Pour faire cela, on peut utiliser des tétraèdres dont une arête est orthogonale aux deux autres qui lui sont adjacentes, avec d'autres propriétés adaptées.



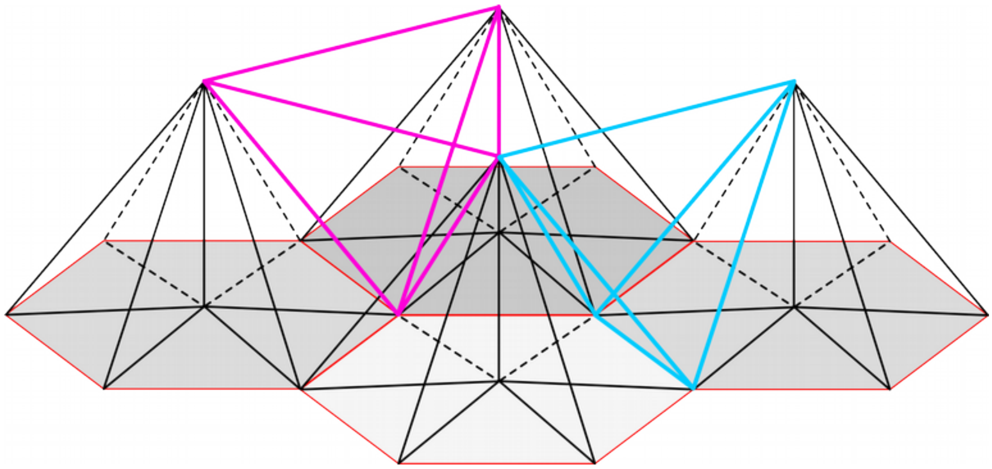
Par exemple, ci-contre, un assemblage de 6 tétraèdres biens choisis pour obtenir une pyramide à base hexagonale régulière.



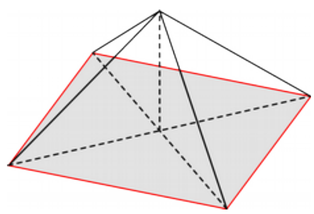
On peut ensuite paver le plan avec les bases de ces pyramides pour obtenir un assemblage comme ci-contre.

Il faut alors se poser la question de la façon dont on peut compléter cet assemblage pour n'avoir aucun trou.

On peut voir qu'avec deux autres types de tétraèdres (le rose et le bleu ci-dessous) on peut entièrement compléter le pavage pour obtenir une « plaque ». Il suffit alors de reproduire le motif sur plusieurs niveaux pour paver l'espace. Notons qu'on peut choir la hauteur des pyramides à base hexagonale pour faire en sorte que les tétraèdres rose et bleu soient identiques (et réguliers).

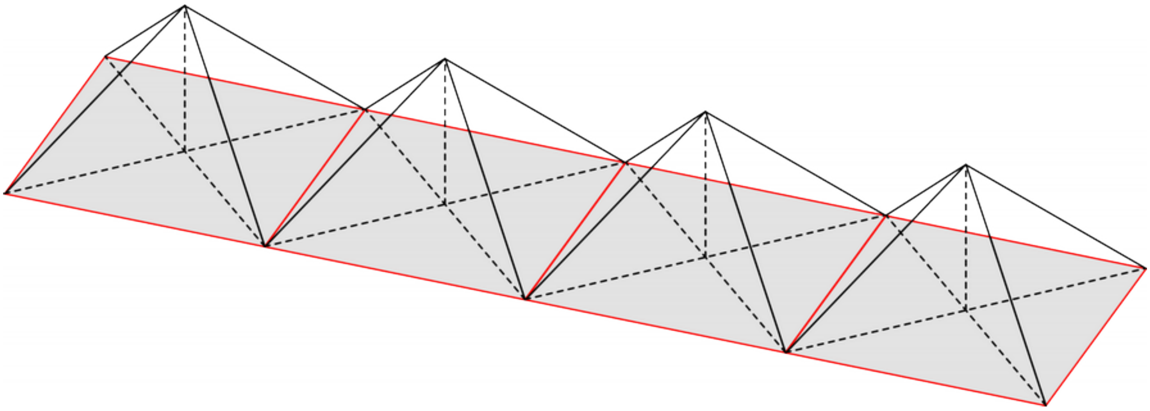


Notons aussi qu'on aurait pu trouver l'idée de la pyramide de base hexagonale construite ici en partant d'un pavage du plan par des bases de tétraèdres réguliers, et en cherchant à combler les espaces restants.
Il peut être intéressant de construire les patrons et d'étudier les propriétés des tétraèdres mis en jeu dans ce pavage.
Pour résoudre le problème de remplissage de cartons, il faudrait ensuite se demander où « arrêter le motif et quelle boîte choisir pour avoir un taux de remplissage assez intéressant. Nous ne faisons pas ces calculs ici (sur un exemple, il suffit de connaître le nombre de tétraèdres de chaque type, leur volume et leur nombre, à comparer au volume du pavé droit représentant le carton).

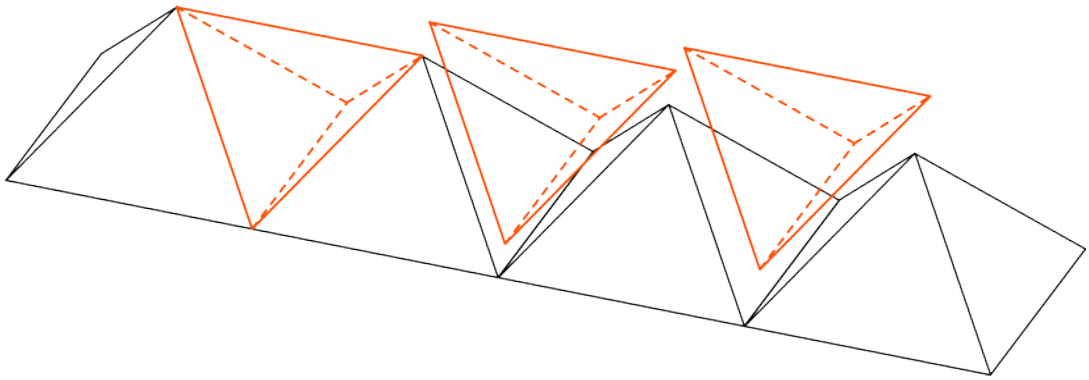


On peut suivre la même idée en construisant des pyramides de bases carrées (ou rectangles) à partir de 4 tétraèdres trirectangles comme ci-contre.

On peut alors assembler des « bandes » de pyramides (imaginez un « Toblerone » infini!) pour obtenir ceci :

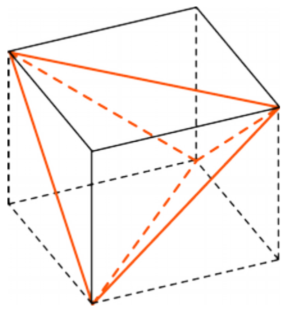


Que l'on peut compléter ainsi avec un autre type de tétraèdre (qui peut être régulier si la hauteur des pyramides est bien choisie) :



On obtient alors des « tubes infinis » de section triangulaire. Il suffit de les mettre côte-à-côte, puis d'en ajouter d'autres en les plaçant à l'envers, en quinconce, pour réaliser une « plaque » comme précédemment. On peut voir ce pavage de l'espace ici : http://tangente-mag.com/probleme.php?id=3374

De façon similaire au cas précédent, on peut se demander comment découper cet assemblage infini pour remplir des cartons en minimisant la proportion d'espace vide dans le carton.

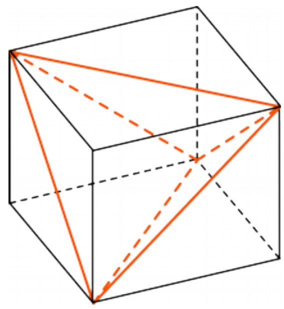


Cependant, dans ce cas-ci, on peut trouver assez facilement une partie du motif, constituée de tétraèdres, qui se réduit à un pavé droit (et même un cube si l'on choisit bien les dimensions des tétraèdres). C'est le motif ci-contre, qu'on peut obtenir en conservant un tétraèdre orange et chacun des tétraèdres ayant une face adjacente à tétraèdre orange. Le fait d'avoir construit les pyramides de départ avec des tétraèdres trirectangles assure que l'on a bien un pavé droit.
On peut donc trouver un pavage de l'espace avec 2 types de tétraèdres, que l'on peut utiliser pour le pavage d'un pavé droit sans aucune perte.

Cela peut donner l'idée de partir d'un pavé droit ou d'un cube pour y découper des tétraèdres et obtenir un pavage sans perte d'espace. C'est ce que l'on va faire dans la section 4. En particulier, on peut essayer de voir si on peut n'utiliser qu'un seul type de tétraèdre.

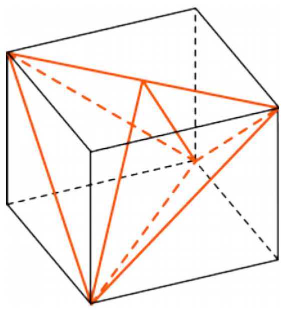
4. Découpage en tétraèdres

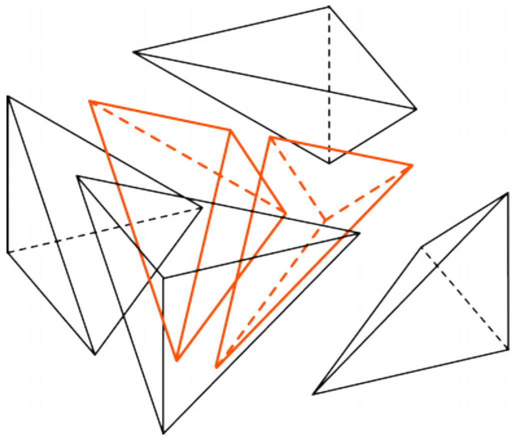
L'autre idée évoquée est de découper un pavé droit en tétraèdres pour s'assurer qu'il n'y a aucune perte d'espace. La question est alors d'essayer d'avoir des tétraèdres de même volume (on peut s'imaginer que la coopérative ne veut pas de berlingots de volumes différents), voire, idéalement, d'avoir un seul type de tétraèdre.



Un cas simple peut se construire en partant d'un cube. On peut construire un tétraèdre régulier (comme sur la figure précédente) reliant 4 sommets non-voisins d'un cube. Si l'on observe la figure obtenue, chaque sommet du cube n'appartenant pas au tétraèdre orange est sommet d'un tétraèdre trirectangle pyramide régulière ayant une face adjacente au tétraèdre orange.

En supposant que le côté du cube est a, on peut exprimer les volumes des 4 tétraèdres noirs : $\frac{1}{6}a^3$, soit un sixième du volume du cube. Le tétraèdre orange a donc un volume d'un tiers du volume du cube.

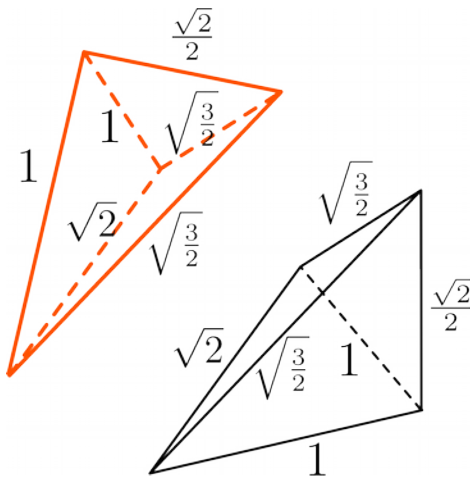




Si l'on découpe ce tétraèdre orange en deux tétraèdres de même volume, on aura un découpage du cubes en 6 tétraèdres de même volume. On peut par exemple suivre le schéma ci-contre, qui découpe le tétraèdre orange en deux tétraèdres identiques (qui sont différents des tétraèdres noirs puisqu'ils ont une arête de longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}a$).

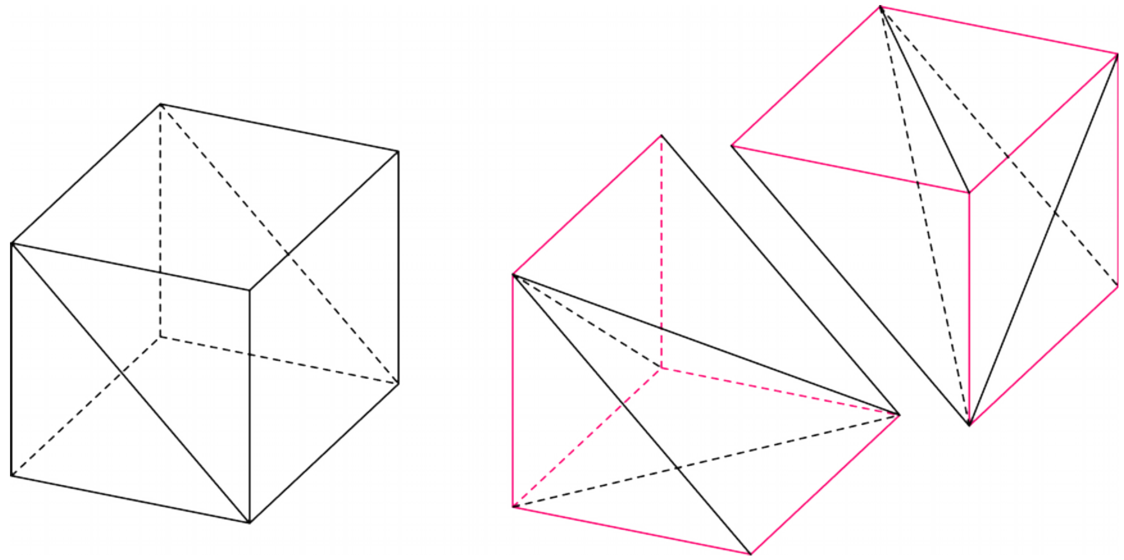
Peut-on découper un pavé droit avec un seul type de tétraèdre ? En modifiant les dimensions du cube, on peut constater qu'on peut faire en sorte que les tétraèdres du découpage précédent soient identiques.

Il suffit pour cela de modifier une des dimensions du cube de côté a (sa hauteur par exemple) pour la remplacer par $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. On peut alors constater que tous les tétraèdres du découpage sont identiques. Les dimensions obtenues sont les suivantes, données pour a=1 (nous laissons la vérifications aux lecteurs) :

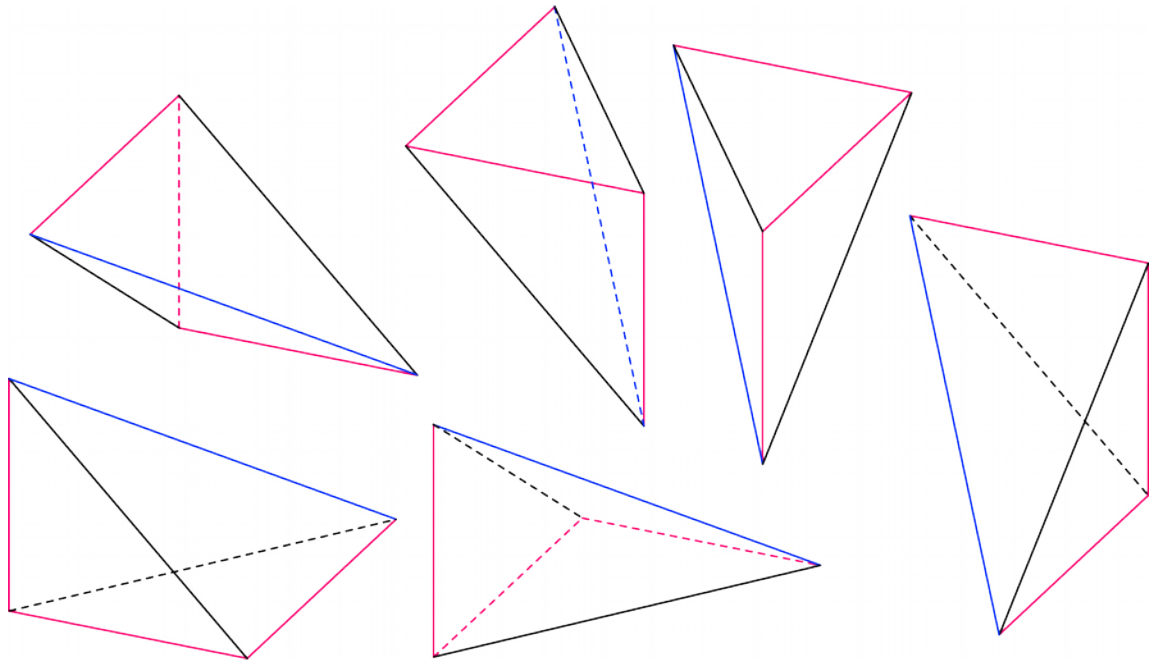


Ce découpage permet donc de n'utiliser qu'un seul type de tétraèdre pour remplir un pavé droit de façon optimale (sans aucune perte). On peut alors utiliser ce tétraèdre comme modèle de berlingot et

utiliser des cartons dont les dimensions sont des multiples de celles du pavé droit que l’on a découpé.
Une autre façon de découper le cube en tétraèdres identiques (à une réflexion par rapport à un plan près) est la suivante (en découpant d’abord en deux le cube selon un plan passant par deux arrêtes opposées) :



Le tétraèdre que l’on obtient est le suivant (vu sous différents angles) :



Ce tétraèdre correspond d’ailleurs à celui choisi par la société Tetra Pak pour proposer un berlingot qui peut s’assembler en cube :

Source : https://www.tetrapak.com/fr/about/newsarchive/tetra-pak-ameliore-la-distribution-de-ses-emballages

5. Retour à la fiction réaliste

À partir de ces résultats mathématiques, il faut revenir au problème « réel ». Les solutions proposées, correctes mathématiquement dans le modèle, sont elle réalisables en pratique ? Les berlingots choisis peuvent-ils être fabriqués facilement ? Il peut d'ailleurs être intéressant de se demander comment on produit leur patron ou comment on « pince » un cylindre pour les réaliser… Et peut-on faire cela sans perte de papier ?

Ce sont des questions que pourra se poser la coopérative pour prendre ses décisions.