

I R E S
Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences
MONTPELLIER

La pêche aux truites - Clôture

Rezo

Ce texte de clôture vise à proposer une résolution du problème de la pêche aux truites. Il est à destination des élèves et des enseignants de tous les niveaux de la 6ème à la Terminale. Le but est d'accompagner les classes vers une clôture de la résolution collaborative.

Toutes les classes sont à féliciter pour leur investissement ! Il y a eu beaucoup d'échanges et de nombreuses propositions pertinentes !

Il est important de bien comprendre que ce document n'est pas *la* solution. La question posée n'admet pas forcément de réponse exacte. Nous avons déjà vu lors des questions que le problème doit d'abord être modélisé. Cela suppose de faire des choix de manière raisonnable. Une fois qu'on dispose d'un modèle, il faut effectuer un traitement mathématique : obtenir des formules puis faire des calculs. Ces simulations permettent d'argumenter et de penser que tel ou tel choix de quotas est plus pertinent qu'un autre.

On propose ici certains modèles et leur traitement, mais d'autres choix sont possibles. Il est important, après le traitement mathématique, de revenir au problème et de voir en quoi les outils mathématiques permettent de l'éclairer.

1 Rappel de l'énoncé



IRES de Montpellier – 2024-2025
Résolution Collaborative de Problème



Jérémy Briussel
jeremie.briussel@umontpellier.fr

LA PÊCHE AUX TRUITES

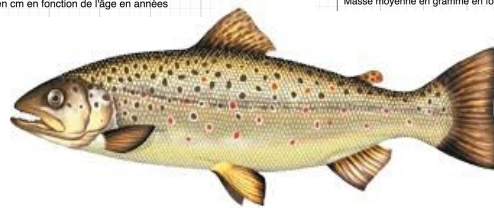
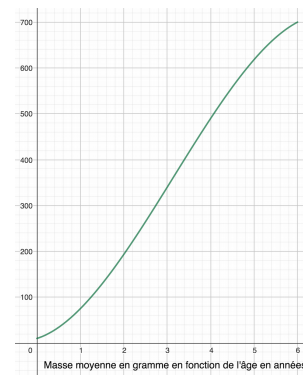
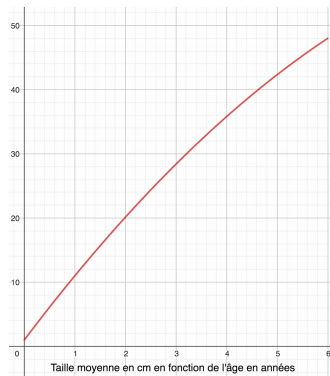
La fédération de pêche a décidé la réintroduction de truites fario dans la rivière Kamo, en lâchant une centaine de truites de 3 ans. La fédération détermine chaque année les quotas de truites pouvant être prélevées dans la rivière. **Comment la fédération doit-elle planifier les quotas pour que les pêcheurs puissent déguster le maximum de truites lors des vingt prochaines années ?**

Reproduction :

Les femelles se reproduisent à partir de 3 ans, les mâles à partir de 2 ans. La reproduction a lieu une fois par an, en hiver. Une femelle pond environ 2000 oeufs par portée. Seule une trentaine de poissons issus de la ponte atteignent l'âge d'un an.

Écosystème :

L'écosystème de la rivière Kamo peut nourrir un maximum d'environ 10 000 truites de plus d'un an.



2 Modèles d'évolution de la population de truites

La première chose à décrire pour aborder le problème, c'est comment la population de truite évolue d'une année sur l'autre.

2.1 Modéliser la reproduction

On nous dit que les femelles se reproduisent à partir de l'âge de 3 ans, les mâles dès 2 ans. Une ponte donne lieu à 2000 oeufs dont seulement 30 alevins (bébé poisson) atteindront l'âge d'un an.

La première difficulté rencontrée est que nous ignorons la répartition femelles-mâles du lâcher et des pontes. Pour simplifier, on suppose (suivant la relance) que la proportion est 50% – 50%. Cela implique que notre population de 100 truites contiendrait 50 femelles et autant de mâles. On supposera aussi que le nombre de poissons pêchés compte autant de femelles que de mâles. (Bien sûr, cela ne peut pas être le cas si on pêche un nombre impair de truites, mais il faut avoir conscience que ce que l'on propose est un modèle. En réalité, le nombre de prises mâles et femelles seraient différents, et il faudrait tenir compte des probabilités d'obtenir telle ou telle proportions... voir conclusion).

Imaginons que le lâcher a été fait à l'automne 2024 (année 0), et que les pontes de toutes les femelles ont été fécondées. Si l'on n'a pêché aucun poisson avant le printemps suivant, la reproduction donnerait

$$2000 \times 50 = 100\,000 \text{ oeufs éclos au printemps 2025 (année 1),}$$

et toujours 100 truites ayant cette fois 4 ans.

Sur les 100 000 oeufs,

$$100\,000 \times \frac{30}{2000} = 1500 \text{ atteindront l'âge d'un an au printemps 2026 (année 2).}$$

(Comme convenu dans l'ensemble des classes, on ne pêche pas les poissons pas encore en âge de se reproduire.) De plus les 100 truites de 4 ans auront pondu 100 000 nouveaux oeufs au printemps 2026.

Plus généralement, pour calculer la population à une année donnée $n + 1$, il faut connaître la population de l'année précédente n par classe d'âge.

Mettons en place des notations permettant d'expliquer le cas général. Pour une année n , on note $p_k(n)$ le nombre de poissons d'âge k en début de saison. Le nombre de poissons d'âge 0 (on dira aussi des oeufs) de l'année n est noté $p_0(n)$.

On note $q_k(n)$ le nombre de truites d'âge k qui seront pêchées au cours de la saison de pêche de l'année n . Ce nombre sera déterminé par les quotas que nous fixerons. Le nombre de truites d'âge k qui restera en fin de saison est donc

$$r_k(n) := p_k(n) - q_k(n). \quad (1)$$

Comme convenu dans la plupart des classes, nous interdirons la pêche des poissons qui ne sont pas encore en âge de se reproduire, donc $r_1(n) = p_1(n)$ et $r_2(n) = p_2(n)$.

On obtient le nombre de truites d'âge k lors de l'année $n + 1$ par la formule

$$p_k(n + 1) = r_{k-1}(n). \quad (2)$$

On suppose ici que toutes les truites qui n'ont pas été pêchées passent l'hiver et sont toujours présentes au printemps suivant. Noter que l'on suppose, suivant la relance, que les poissons n'atteignent jamais l'âge de 7 ans : elles meurent alors de cause "naturelle".

Le nombre d'oeufs pondus en janvier de l'année $n + 1$ dépend du nombre de femelles ayant au moins 3 ans à la fin de l'année n . On a la formule:

$$p_0(n + 1) = 2000 \times (r_3(n) + r_4(n) + r_5(n) + r_6(n)) \times \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Le facteur $1/2$ correspond au fait que la moitié seulement des truites sont des femelles. Le nombre de poissons d'un an d'âge est donné par

$$p_1(n + 1) = p_0(n) \times \frac{30}{2000}. \quad (4)$$

À ce stade, nous n'avons pas tenu compte du fait que certaines truites de moins de 6 ans peuvent mourir sans avoir été pêchées, par exemple à cause de prédateurs ou de maladies. Pour en tenir compte, on introduit un taux de mortalité de $T\%$ qui n'est pas lié à la pêche, que l'on appellera *taux de mortalité naturelle*. La documentation trouvée par certaines classes laisse penser que 5% ou 10% sont des valeurs convenables, soit $T = 5$ ou $T = 10$ dans la formule suivante, où l'on remplace la formule (2) par

$$p_k(n+1) = r_{k-1}(n) \times \frac{100 - T}{100}. \quad (5)$$

Pour $T = 0$, on retrouve la formule (2).

Si l'on utilise ces formules, et que l'on met tous les quotas de pêche à 0, on peut faire les calculs en détails. Il est plus rapide de faire un programme ou d'utiliser un tableur, car calculer à la main, même avec un calculatrice, est long. Lorsque l'on fait les calculs avec ce modèle, on constate que la population dépasse rapidement la limite donnée de 10 000 truites au maximum pouvant vivre dans l'écosystème de la rivière. Comme on le constate dans les tableaux suivant (avec $T = 0$):

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	100000	100000	100000	1500000	3000000
p_1(n)	0	0	1500	1500	1500	1500	22500
p_2(n)	0	0	0	1500	1500	1500	1500
p_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
p_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
p_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
p_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
r_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
r_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
r_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
7	8	9	10	11	12	13	14
4500000	6000000	27000000	70500000	136500000	225000000	607500000	1620000000
45000	67500	90000	405000	1057500	2047500	3375000	9112500
22500	45000	67500	90000	405000	1057500	2047500	3375000
1500	22500	45000	67500	90000	405000	1057500	2047500
1500	1500	22500	45000	67500	90000	405000	1057500
1500	1500	1500	22500	45000	67500	90000	405000
1500	1500	1500	1500	22500	45000	67500	90000
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	22500	45000	67500	90000	405000	1057500	2047500
1500	1500	22500	45000	67500	90000	405000	1057500
1500	1500	1500	22500	45000	67500	90000	405000
1500	1500	1500	1500	22500	45000	67500	90000

2.2 Modéliser la limite de population de la rivière

La limite donnée de 10 000 truites peut être décrite par l'inégalité suivante, qui doit être vérifiée chaque année n :

$$r_1(n) + r_2(n) + r_3(n) + r_4(n) + r_5(n) + r_6(n) \leq 10\,000.$$

Cette condition assure que le nombre de truites restantes à la fin de la saison de pêche ne dépasse pas la limite donnée par l'écosystème.

Les premières années, la population est très loin d'atteindre la limite. C'est à la sixième année que la population devient excessive. Il faut alors modéliser comment la population va se réguler.

On manque d'informations pour avoir un modèle très précis. On propose ici un modèle simple où les populations les plus jeunes sont les premières touchées. Ceci correspond à des observations faites dans des aquarium.

On corrige donc la formule (4) comme suit:

$$p_1(n+1) = \min \left(p_0(n) \times \frac{30}{2000}, 10\,000 - (r_1(n) + r_2(n) + r_3(n) + r_4(n) + r_5(n)) \right) \quad (6)$$

qui se lit : soit le nombre d'alevins d'un an ajouté au nombre de truites qui passent l'hiver de l'année n à $n+1$ ne dépasse pas la limite, auquel cas tous survivent, soit la population atteindra son maximum et on en déduit le nombre d'alevins survivants (10 000 moins les autres truites plus âgées).

Avec ce modèle, si on laisse la population évoluer sans pêcher, elle évolue suivant les tableaux suivants (avec $T = 0$):

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	100000	100000	100000	1500000	3000000
p_1(n)	0	0	1500	1500	1500	1500	4000
p_2(n)	0	0	0	1500	1500	1500	1500
p_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
p_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
p_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
p_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
r_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
r_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
r_6(n)	0	0	0	100	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
4500000	6000000	8500000	7000000	7000000	7000000	4500000	6000000
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500

15	16	17	18	19	20	21	22
8500000	7000000	7000000	7000000	4500000	6000000	8500000	7000000
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500

3 Les quotas de pêche

Maintenant que nous avons un modèle d'évolution de nos populations, nous pouvons proposer des quotas, puis les implémenter dans nos modèles, pour voir de quelle manière ils vont impacter l'évolution des populations de truites.

3.1 Choix de quotas

Dans la pêche professionnelle en mer, les quotas sont des quantités de poisson, exprimées en tonnes, que les pêcheurs ont le droit de prendre. Par exemple la quantité totale de sardine autorisée à la pêche lors d'une campagne est répartie entre les différents pêcheurs.

Concernant la pêche amateur en rivière, les quotas sont généralement exprimés en fonction d'une taille minimale, et d'un nombre maximal de prises par jour. Comme la fédération connaît le nombre de pêcheurs et leurs habitudes (nombre moyen de poissons pêchés par pêcheur et par an), cela revient à peu près au même. Pour notre rivière Kamo, nous allons définir les quotas en terme de nombre total de prises autorisées, avec une taille minimum.

Comme on ignore le nombre de pêcheurs et leurs habitudes, on donne un modèle basé seulement sur une taille minimale, et l'on suppose que les pêcheurs prendront toutes les truites ayant cette taille au moins.

Ainsi, en vue du graphique de taille moyenne, on obtient les quotas possibles suivants:

- si la taille minimale est de 25cm (ou entre 21 et 27cm), alors tous les poissons ayant au moins 3 ans seront pêchés,
- si la taille minimale est de 30cm (ou entre 29 et 35cm), alors tous les poissons ayant au moins 4 ans seront pêchés,
- si la taille minimale est de 40cm (ou entre 37 et 41cm), alors tous les poissons ayant au moins 5 ans seront pêchés,
- si la taille minimale est de 45cm (ou entre 43 et 47cm), alors seuls les poissons ayant 6 ans seront pêchés.

Ces paliers sont un peu arbitraire, et ne tiennent pas compte que les truites grandissent au cours de la saison de pêche, mais c'est déjà une bonne première approximation.

3.2 Implémentation des quotas dans le modèle

On notera en abrégé M_{25} le modèle correspondant à une taille minimale de 25cm, et de même M_{30} , M_{40} et M_{45} les trois autres.

On a donc selon ces modèles simples de taille minimale:

$$\begin{aligned}
 (M_{25}) \left\{ \begin{array}{l} q_1(n) = 0 \\ q_2(n) = 0 \\ q_3(n) = p_3(n) \\ q_4(n) = p_4(n) \\ q_5(n) = p_5(n) \\ q_6(n) = p_6(n) \end{array} \right. & \quad (M_{30}) \left\{ \begin{array}{l} q_1(n) = 0 \\ q_2(n) = 0 \\ q_3(n) = 0 \\ q_4(n) = p_4(n) \\ q_5(n) = p_5(n) \\ q_6(n) = p_6(n) \end{array} \right. & \quad (M_{40}) \left\{ \begin{array}{l} q_1(n) = 0 \\ q_2(n) = 0 \\ q_3(n) = 0 \\ q_4(n) = 0 \\ q_5(n) = p_5(n) \\ q_6(n) = p_6(n) \end{array} \right. & \quad (M_{45}) \left\{ \begin{array}{l} q_1(n) = 0 \\ q_2(n) = 0 \\ q_3(n) = 0 \\ q_4(n) = 0 \\ q_5(n) = 0 \\ q_6(n) = p_6(n) \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

3.3 Il y a d'autres choix possibles

Il serait bien sûr possible d'appliquer des quotas différents chaque année, selon des règles plus compliquées, avec une modélisation adéquate. Par exemple, on peut donner une taille minimale de 25cm et imposer un nombre total de prises d'au plus 3000. Le problème dans ce cas est que l'on ne sait pas la proportion de truites de 3, 4, 5 ou 6 ans qui seront prélevées. Un modèle simple consiste à dire que les truites de 25cm seront prises au hasard uniforme dans la population (ce n'est pas très rigoureux car souvent les truites expérimentées sont

plus difficiles à pêcher). On aurait alors un modèle

$$(M_{40,3000}) \begin{cases} q_1(n) = 0 \\ q_2(n) = 0 \\ q_3(n) = \min \left(\frac{3000}{p_3(n)+p_4(n)+p_5(n)+p_6(n)} p_3(n), p_3(n) \right) \\ q_4(n) = \min \left(\frac{3000}{p_3(n)+p_4(n)+p_5(n)+p_6(n)} p_4(n), p_4(n) \right) \\ q_5(n) = \min \left(\frac{3000}{p_3(n)+p_4(n)+p_5(n)+p_6(n)} p_5(n), p_5(n) \right) \\ q_6(n) = \min \left(\frac{3000}{p_3(n)+p_4(n)+p_5(n)+p_6(n)} p_6(n), p_6(n) \right) \end{cases}$$

Le minimum dans la formule permet de tenir compte du fait qu'il pourrait y avoir moins de 3000 truites mesurant 40cm et qu'elles seraient alors toutes pêchées.

Toutefois, nous ne détaillerons ces modèles dans notre clôture.

3.4 Comment comparer les quotas ?

Maintenant que nous avons mis en place des modèles d'évolution de population et que nous avons établi des propositions de quotas, il nous faut voir quels quotas seront pertinents pour que nos pêcheurs puissent déguster le maximum de truites lors des 20 prochaines années. Il n'y a plus qu'à faire les calculs !

Mais au fait, que doit on calculer ?

On doit calculer la quantité de truites pêchée pendant une période de 20 ans.

Le nombre total de truites pêchées est assez facile à obtenir, c'est

$$N = q_3(1) + \dots + q_3(20) + q_4(1) + \dots + q_4(20) + q_5(1) + \dots + q_5(20) + q_6(1) + \dots + q_6(20).$$

Mais attention, compter le nombre de poissons ne tient pas compte du fait que certaines truites seront plus grosses. On peut aussi chercher à obtenir la plus grande masse possible de truites pêchées plutôt que leur nombre.

En vue du graphique de taille moyenne, on dira qu'une truite de 3 ans pèse environ 340gr, contre 490gr à 4 ans, 610gr à 5 ans et 700gr à 6 ans. La masse totale pêchée est donc donnée par la formule

$$m = 340(q_3(1) + \dots + q_3(20)) + 490(q_4(1) + \dots + q_4(20)) + 610(q_5(1) + \dots + q_5(20)) + 700(q_6(1) + \dots + q_6(20))$$

On obtient un résultat en grammes, que l'on divise par un million pour obtenir des tonnes.

4 Calculs avec le modèle des tailles minimales

Nous allons maintenant faire les calculs dans le modèle des tailles minimales. Nous devons choisir la taille minimale parmi les choix 25cm, 30cm, 40cm ou 45cm. Notre modèle dépend aussi d'un paramètre de mortalité naturel T . Nous allons étudier deux cas : le plus simple où $T = 0\%$ et un modèle avec $T = 10\%$.

Dans tous les cas, on interdit la pêche les 3 premières années afin de permettre à la population de truites d'augmenter rapidement au début.

De plus, nous avons aussi fait les calculs sur une période de 50 ans, pour voir si les recommandations seraient changées si l'on envisage une période plus longue.

4.1 Modèle de taille minimal sans mortalité naturelle

On suppose d'abord que le taux de mortalité naturel $T = 0\%$ est nul. On compare les évolution de populations et les quantités pêchées suivant la taille minimale.

Techniquement, on calcule avec les données initiales et les formules (1), (2), (3) et (6).

4.1.1 Taille minimale de 25cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

[illegible]

Le résultat est attendu. Puisqu'on pêche tous les poissons en âge de se reproduire, on épuise la ressource. On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	6000
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	2,04
Nombre de prises en 50 ans	6000
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	2,04

4.1.2 Taille minimale de 30cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	100000	100000	100000	1500000	1500000
p_1(n)	0	0	1500	1500	1500	1500	5500
p_2(n)	0	0	0	1500	1500	1500	1500
p_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
p_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
p_5(n)	0	0	100	0	0	0	0
p_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	1500	1500
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
r_4(n)	0	100	0	0	0	0	0
r_5(n)	0	0	100	0	0	0	0
r_6(n)	0	0	0	100	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
1500000	1500000	5500000	1500000	1500000	1500000	5500000	1500000
1500	1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500
5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500	1500
1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500
1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
15	16	17	18	19	20	21	22
1500000	1500000	5500000	1500000	1500000	1500000	5500000	1500000
1500	1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500
5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500	1500
1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500
1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	5500	1500	1500	1500	5500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	36000
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	17,64
Nombre de prises en 50 ans	113000
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	55,37

4.1.3 Taille minimale de 40cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	100000	100000	100000	1500000	3000000
p_1(n)	0	0	1500	1500	1500	1500	4000
p_2(n)	0	0	0	1500	1500	1500	1500
p_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
p_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
p_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
p_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	1500
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
r_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
r_5(n)	0	0	100	0	0	0	0
r_6(n)	0	0	0	100	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
3000000	3000000	5500000	5500000	3000000	3000000	3000000	5500000
1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500
4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500
1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500
1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500
1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

15	16	17	18	19	20	21	22
5500000	3000000	3000000	3000000	5500000	5500000	3000000	3000000
1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500
1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500
4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
4000	1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	30000
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	18,3
Nombre de prises en 50 ans	90000
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	54,9

4.1.4 Taille minimale de 45cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	100000	100000	100000	1500000	3000000
p_1(n)	0	0	1500	1500	1500	1500	4000
p_2(n)	0	0	0	1500	1500	1500	1500
p_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
p_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
p_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
p_6(n)	0	0	0	100	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1500	1500	1500
r_4(n)	0	100	0	0	0	1500	1500
r_5(n)	0	0	100	0	0	0	1500
r_6(n)	0	0	0	100	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
4500000	4500000	7000000	5500000	5500000	3000000	4500000	4500000
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
15	16	17	18	19	20	21	22
7000000	5500000	5500000	3000000	4500000	4500000	7000000	5500000
1500	1500	1500	4000	0	1500	1500	1500
1500	1500	1500	1500	4000	0	1500	1500
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1500	1500	4000	0	1500	1500	1500	1500
0	1500	1500	1500	1500	4000	0	1500
4000	0	1500	1500	1500	1500	4000	0
1500	4000	0	1500	1500	1500	1500	4000
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	23000
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	16,1
Nombre de prises en 50 ans	73000
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	51,1

4.2 Modèle de taille minimal avec mortalité naturelle de 10%

On suppose maintenant que le taux de mortalité naturel $T = 0\%$. On compare les évolutions de populations et les quantités pêchées suivant la taille minimale.

On ne considère plus que les tailles minimales de 30cm, 40cm ou 45cm, puisque avec 25cm on épuise la ressource totalement.

Cette fois, on calcule avec les données initiales et les formules (1), (2), (5) et (6).

4.2.1 Taille minimale de 30cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	90000	81000	73000	1215000	1094000
p_1(n)	0	0	1500	1350	1215	1095	6717
p_2(n)	0	0	0	1350	1215	1094	986
p_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
p_4(n)	0	90	0	0	0	1094	985
p_5(n)	0	0	81	0	0	0	0
p_6(n)	0	0	0	73	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	1094	985
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
r_4(n)	0	90	0	0	0	0	0
r_5(n)	0	0	81	0	0	0	0
r_6(n)	0	0	0	73	0	0	0
7	8	9	10	11	12	13	14
985000	887000	5441000	1063000	1422000	1314000	4646000	1121000
1312	1756	1622	5735	1383	2141	1968	4984
6045	1181	1580	1460	5162	1245	1927	1771
887	5441	1063	1422	1314	4646	1121	1734
887	798	4897	957	1280	1183	4181	1009
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
887	798	4897	957	1280	1183	4181	1009
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
887	5441	1063	1422	1314	4646	1121	1734
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
15	16	17	18	19	20	21	22
1734000	1594000	4037000	1224000	1951000	1778000	3576000	1345000
1511	2409	2194	4414	1660	2589	2341	3984
4486	1360	2168	1975	3973	1494	2330	2107
1594	4037	1224	1951	1778	3576	1345	2097
1561	1435	3633	1102	1756	1600	3218	1211
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1561	1435	3633	1102	1756	1600	3218	1211
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1594	4037	1224	1951	1778	3576	1345	2097
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	28358
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	13,895
Nombre de prises en 50 ans	87786
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	43,015

4.2.2 Taille minimale de 40cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	90000	81000	73000	1215000	2188000
p_1(n)	0	0	1500	1350	1215	1095	5623
p_2(n)	0	0	0	1350	1215	1094	986
p_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
p_4(n)	0	90	0	0	0	1094	985
p_5(n)	0	0	81	0	0	0	985
p_6(n)	0	0	0	73	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	985
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
r_4(n)	0	90	0	0	0	1094	985
r_5(n)	0	0	81	0	0	0	0
r_6(n)	0	0	0	73	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
1970000	1774000	5353000	5251000	2449000	2588000	2444000	4807000
1421	1744	1624	1555	4534	1478	1997	1866
5061	1279	1570	1462	1400	4081	1330	1797
887	4555	1151	1413	1316	1260	3673	1197
887	798	4100	1036	1272	1184	1134	3306
887	798	718	3690	932	1145	1066	1021
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
887	798	718	3690	932	1145	1066	1021
0	0	0	0	0	0	0	0
887	4555	1151	1413	1316	1260	3673	1197
887	798	4100	1036	1272	1184	1134	3306
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

15	16	17	18	19	20	21	22
4503000	2694000	2966000	2846000	4410000	4054000	2901000	3195000
1834	3793	1590	2150	2009	2002	3289	1714
1679	1651	3414	1431	1935	1808	1802	2960
1617	1511	1486	3073	1288	1742	1627	1622
1077	1455	1360	1337	2766	1159	1568	1464
2975	969	1310	1224	1203	2489	1043	1411
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
2975	969	1310	1224	1203	2489	1043	1411
0	0	0	0	0	0	0	0
1617	1511	1486	3073	1288	1742	1627	1622
1077	1455	1360	1337	2766	1159	1568	1464
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	21412
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	13,061
Nombre de prises en 50 ans	65300
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	39,833

4.2.3 Taille minimale de 45cm

On fait les calculs et on obtient le tableau suivant:

Année n	0	1	2	3	4	5	6
p_0(n)	0	100000	90000	81000	73000	1215000	2188000
p_1(n)	0	0	1500	1350	1215	1095	985
p_2(n)	0	0	0	1350	1215	1094	986
p_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
p_4(n)	0	90	0	0	0	1094	985
p_5(n)	0	0	81	0	0	0	985
p_6(n)	0	0	0	73	0	0	0
q_3(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_4(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_5(n)	0	0	0	0	0	0	0
q_6(n)	0	0	0	0	0	0	0
r_3(n)	100	0	0	0	1215	1094	985
r_4(n)	0	90	0	0	0	1094	985
r_5(n)	0	0	81	0	0	0	985
r_6(n)	0	0	0	73	0	0	0

7	8	9	10	11	12	13	14
2955000	2661000	6151000	5171000	5500000	2938000	3647000	3401000
436	1842	1615	1556	1490	4172	840	2004
5061	392	1658	1454	1400	1341	3755	756
887	4555	353	1492	1309	1260	1207	3380
887	798	4100	318	1343	1178	1134	1086
887	798	718	3690	286	1209	1060	1021
887	798	718	646	3321	257	1088	954
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
887	798	718	646	3321	257	1088	954
887	4555	353	1492	1309	1260	1207	3380
887	798	4100	318	1343	1178	1134	1086
887	798	718	3690	286	1209	1060	1021
0	0	0	0	0	0	0	0

15	16	17	18	19	20	21	22
5487000	4699000	4974000	3433000	4007000	3803000	5056000	4464000
1753	1744	1704	3293	1166	2067	1828	1848
1804	1578	1570	1534	2964	1049	1860	1645
680	1624	1420	1413	1381	2668	944	1674
3042	612	1462	1278	1272	1243	2401	850
977	2738	551	1316	1150	1145	1119	2161
919	879	2464	496	1184	1035	1031	1007
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
919	879	2464	496	1184	1035	1031	1007
680	1624	1420	1413	1381	2668	944	1674
3042	612	1462	1278	1272	1243	2401	850
977	2738	551	1316	1150	1145	1119	2161
0	0	0	0	0	0	0	0

On a les résultats suivants:

Nombre de prises en 20 ans	15646
Masse des prises en 20 ans(en tonnes)	10,952
Nombre de prises en 50 ans	50462
Masse des prises en 50 ans(en tonnes)	35,323

5 Conclusion

Les résultats des calculs dans nos deux modèles sont convergents. Rappelons que nous nous sommes concentré sur le cas où l'on laisse d'abord la population se développer librement les premières années, puis nous fixons une taille minimale. On suppose que toutes les truites ayant cette taille seront pêchées.

Si l'on cherche à maximiser le nombre de prises, alors il faut mettre une taille minimale de 30cm.

En effet, si l'on met une taille plus petite (en fait inférieure à 28cm), alors on entre dans une situation de sur-pêche et les truites ne peuvent plus se reproduire. Il y a extinction de la population. Pour une taille minimale de 30cm, 40cm ou 45cm, qui permettent de pêcher les truites dès qu'elles ont 4, 5 ou 6 ans, il

apparaît pour les deux modèles avec $T = 0\%$ ou $T = 10\%$ que les pêcheurs pourront prendre nettement plus de prises si la taille minimale est de 30cm.

Heuristiquement, cela s'explique car en pêchant les truites dès leurs 4 ans, on permet à plus de jeunes truites de grandir que si l'on attend plus tard.

Si l'on cherche à maximiser la masse de truite pêchée, alors on peut hésiter entre une taille minimale de 30cm et une de 40cm. En effet, le modèle avec $T = 0\%$ indique qu'une taille minimale de 40cm permet d'obtenir un meilleur tonnage (18,3t) qu'une taille minimale de 30cm (17,64t) au bout de 20 ans. Toutefois, si l'on étend la durée à 50 ans, ou si l'on tient compte d'un paramètre de mortalité naturelle de 10% (sans doute plus réaliste), alors il vaut mieux choisir une taille minimale de 30cm.

Ces résultats montrent que le gain de masse obtenu en attendant que les truites grandissent n'est pas suffisant pour compenser l'allongement du cycle de reproduction. C'est d'autant plus marquant si l'on tient compte de la mortalité.

Une analyse fine montre que le fait d'obtenir un tonnage plus élevé au bout de 20 ans avec une taille minimale de 40cm est lié à la durée des cycles, et au fait que la 20ème année soit faste pour les pêcheurs si l'on prescrit ces quotas, alors qu'avec 30cm l'année suivante verrait une population de poissons plus abondante.

Au final, nous avons une recommandation claire pour la fédération de pêche : fixer une taille minimale de 30cm.

Bon appétit !

